

Temat: Równania stopni wyższych.

Przykład:

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad -64x^2 + 0,25 &= 0 \\ -64x^2 &= -\frac{1}{4} \quad |:(-64) \\ x^2 &= \frac{1}{256} \\ x &= \frac{1}{16} \text{ lub } x = -\frac{1}{16} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $9x^2 - 25 = 0$

c) $x^2 - 2 = 0$

e) $-4x^2 + 36 = 0$

b) $16x^2 - \frac{81}{4} = 0$

d) $2x^2 - 9 = 0$

f) $-64x^2 + 0,25 = 0$

Cwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $7x^3 - 56 = 0$

c) $8x^3 - 1 = 0$

e) $5x^3 + 0,625 = 0$

b) $2x^3 + 54 = 0$

d) $27x^3 + 8 = 0$

f) $3x^3 - 192 = 0$

a) Rozwiąż równanie $x^3 - 4x = 0$.

$$x(x^2 - 4) = 0 \quad \text{wyłączamy } x \text{ przed nawias}$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 - 4 = 0$$

Równość $x^2 - 4 = 0$ zachodzi, gdy $x = -2$ lub $x = 2$.Zatem równanie ma trzy rozwiązania: -2 , 0 i 2 .**Ćwiczenie 2**

Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 9x = 0$

c) $4x^3 - x = 0$

e) $x^3 = 36x$

b) $x^3 + 64x = 0$

d) $9x^3 + x = 0$

f) $x^3 = -4x$

Rozwiąż równanie $x(x+2)(x-3) = 0$.

Korzystamy z podanej obok własności i otrzymujemy:

$$x = 0 \text{ lub } x + 2 = 0 \text{ lub } x - 3 = 0.$$

$$a \cdot b \cdot c = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy} \\ a = 0 \text{ lub } b = 0 \text{ lub } c = 0.$$

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: 0 , -2 i 3 .**Ćwiczenie 3**

Rozwiąż równanie.

a) $x(x-2)(x-4) = 0$

d) $(x+1)(x+9)(3x-1) = 0$

b) $x(x-5)(x+6) = 0$

e) $(x-9)(2x+1)(2x-3) = 0$

c) $x(x+1)(2x+6) = 0$

f) $(4x+1)(6x-9)(2x-8) = 0$

b) Rozwiąż równanie $x^3 - 2x^2 - 15x = 0$.

$$x(x^2 - 2x - 15) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 - 2x - 15 = 0$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe:

$$\Delta = 4 + 60 = 64, \sqrt{\Delta} = 8$$

$$x_1 = \frac{2-8}{2} = -3, x_2 = \frac{2+8}{2} = 5$$

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: 0, -3 i 5.

c) Rozwiąż równanie $5x^3 + 4x^2 + 4x = 0$.

$$x(5x^2 + 4x + 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ lub } 5x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \Delta = 16 - 80 = -64 < 0$$

Równanie kwadratowe jest sprzeczne ($\Delta < 0$), zatem jedynym rozwiązaniem równania wyjściowego jest liczba 0.

a) $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$

d) $-2x^3 + 9x^2 + 5x = 0$

b) $x^3 + 4x^2 + 3x = 0$

e) $3x^3 + 4x^2 + x = 0$

c) $-x^3 + 4x^2 - 4x = 0$

f) $4x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

Temat: **Równania wymierne.**

Rozwiązując równania wymierne wykorzystujemy proporcje:

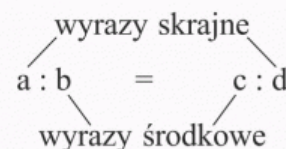
$a : b$ – iloraz liczb a i b , gdzie $b \neq 0$

$c : d$ – iloraz liczb c i d , gdzie $d \neq 0$

$a : b = c : d$ – proporcja

lub inny zapis

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{gdzie } b \neq 0 \text{ i } d \neq 0$$



W proporcji iloczyn wyrazów skrajnych równa się iloczynowi wyrazów środkowych, czyli

W praktyce stosuje się częściej zapis ułamkowy;

mówimy, że mnożymy na krzyż

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Karta pracy nr 3 – klasa IV

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

$$\begin{array}{llll} \text{a)} \frac{6}{x+1} = 4 & \text{c)} \frac{3}{-2x+7} = 1 & \text{e)} \frac{7x+6}{1-3x} = -4 & \text{g)} \frac{x-5}{3x+1} - 2 = 0 \\ \text{b)} \frac{3x+2}{x} = 5 & \text{d)} \frac{2x}{x-1} = 3 & \text{f)} \frac{4-2x}{4-x} = -2 & \text{h)} \frac{2x+4}{x-1} + 4 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{6}{x+1} = 4 & \text{Najpierw określamy dziedzinę równania } x+1 \neq 0 \\ & x \neq -1 \\ & \frac{6}{x+1} = \frac{4}{1} \quad 4 \text{ zapisujemy w postaci ułamka zwykłego} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{array}$$

Mnożymy na krzyż

$$4 \cdot (x+1) = 6 \cdot 1$$

$$4x + 4 = 6$$

$$4x = 6 - 4$$

$$4x = 2 | :4$$

$$x = \frac{1}{2} \in D_f \quad \text{sprawdzamy czy rozwiązanie należy do dziedziny}$$

Odp: Rozwiązaniem równania jest liczba $\frac{1}{2}$. lub $x \in \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$$\begin{array}{ll} \text{h)} \frac{2x+4}{x-1} + 4 = 0 & \text{Najpierw określamy dziedzinę równania } x-1 \neq 0 \\ & x \neq 1 \\ & \frac{2x+4}{x-1} = -4 \quad -4 = \frac{-4}{1} \text{ zapisujemy w postaci ułamka zwykłego} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ & \frac{2x+4}{x-1} = \frac{-4}{1} \end{array}$$

Mnożymy na krzyż

$$-4 \cdot (x-1) = 1 \cdot (2x+4)$$

$$-4x + 4 = 2x + 4$$

$$-4x - 2x = 4 - 4$$

$$-6x = 0 | :(-6)$$

$$x = 0 \in D_f \quad \text{sprawdzamy czy rozwiązanie należy do dziedziny}$$

Odp: Rozwiązaniem równania jest liczba 0.

Rozwiążcie pozostałe równania.

Ćwiczenie 2 Rozwiąż równanie.

$$\text{A. } \frac{3x-3}{x-1} = 2 \quad \text{B. } \frac{6x-2}{3x-1} = 2 \quad \text{C. } \frac{1-4x}{8x-2} = -0,5 \quad \text{D. } \frac{6x+3}{8x+2} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{array}{ll} \text{c)} \frac{1-4x}{8x-2} = -0,5 & \text{Najpierw określamy dziedzinę równania } 8x-2 \neq 0 \\ & 8x \neq 2 | :8 \end{array}$$

$$2 \cdot (1-4x) = -1 \cdot (8x-2) \quad x \neq \frac{1}{4}$$

$$2 - 8x = -8x + 2$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

$$-8x + 8x = 2 - 2$$

$$0 = 0 \quad \text{wyrażenie prawdziwe, więc rozwiązaniem są wszystkie liczby rzeczywiste oprócz } \frac{1}{4}.$$

$$\text{Odp: } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{4}\right\}$$

Karta pracy nr 3 – klasa IV

$$d) \frac{6x+3}{8x+2} = \frac{3}{4}$$

Najpierw określamy dziedzinę równania

$$8x + 2 \neq 0$$

$$3 \cdot (8x + 2) = 4 \cdot (6x + 3)$$

$$8x \neq -2 \quad | :8$$

$$24x + 6 = 24x + 12$$

$$x \neq -\frac{1}{4}$$

$$24x - 24x = 12 - 6$$

$$D_f = R \setminus \left\{-\frac{1}{4}\right\}$$

$$0 = 6 \quad \text{Wyrażenie fałszywe, więc równanie nie ma rozwiązania.}$$

$$\text{Odp: } x \in \emptyset$$

Rozwiążcie pozostałe równania.

Ćwiczenie 4

Rozwiąż równanie.

$$a) \frac{7}{x+1} = \frac{3}{x+5}$$

$$c) \frac{x}{x-2} = \frac{x+2}{x-1}$$

$$e) \frac{x+3}{x-3} = \frac{6}{x-3}$$

$$b) \frac{-2}{x-1} = \frac{4}{2x+3}$$

$$d) \frac{x-3}{2x} = \frac{x-2}{2x+1}$$

$$f) \frac{2x}{x-7} = \frac{x}{x+1}$$

$$e) \frac{x+3}{x-3} = \frac{6}{x-3}$$

Najpierw określamy dziedzinę równania

$$x - 3 \neq 0$$

$$(x + 3) \cdot (x - 3) = 6 \cdot (x - 3)$$

$$x \neq 3$$

wzór skróconego mnożenia

$$D_f = R \setminus \{3\}$$

$$x^2 - 9 = 6x - 18$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$a=1 \quad b=-6 \quad c=9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = \frac{6}{2} = 3 \notin D_f$$

Odp: Równanie nie ma rozwiązania.

$$\text{lub } x \in \emptyset$$

Rozwiążcie pozostałe równania.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

$$a) \frac{2}{x} = x + 1$$

$$c) \frac{4}{x+3} = x + 3$$

$$e) \frac{6}{x} = x + 5$$

$$g) \frac{3}{x+2} = x$$

$$b) -\frac{1}{x} = x + 2$$

$$d) \frac{9}{6-x} = x$$

$$f) -\frac{8}{x} = x + 6$$

$$h) -\frac{6}{x-3} = 2x + 1$$

Temat: Funkcje wykładnicze i logarytmy.

Dla dowolnej liczby $a > 0$, liczby naturalnej $n > 1$ i liczby całkowitej m przyjmujemy:

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbf{R}_+$ i dowolnych $x, y \in \mathbf{R}$ prawdziwe są wzory:

$$1. \ a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

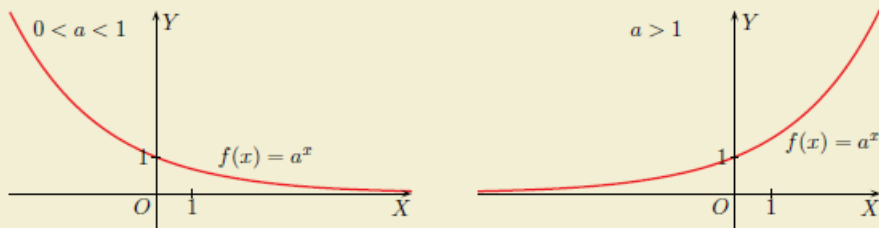
$$4. \ a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$2. \ \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$5. \ \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$3. \ (a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Funkcją wykładniczą nazywamy funkcję postaci $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ i $a \neq 1$, określoną dla $x \in \mathbf{R}$.



Niech a i b będą liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$. Logarytm liczby b przy podstawie a to wykładnik potęgi, do której należy podnieść podstawę a , aby otrzymać liczbę logarytmowaną b .

$$\log_a b = x, \text{ gdy } a^x = b$$

Jeżeli a, b, x i y są liczbami dodatnimi oraz $a \neq 1$, to:

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Ponadto dla dowolnego $\alpha \in \mathbf{R}$: $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$.

1. Oblicz.

$$a) \ 27^{\frac{4}{3}} - 0,01^{-0,5} \cdot 16^{\frac{3}{4}}$$

$$c) \ 0,125^{-\frac{2}{3}} + 32^{\frac{4}{5}} : (\sqrt[6]{4})^3$$

$$b) \ 5 \cdot \left(\frac{25}{81}\right)^{-0,5} - (\sqrt[4]{3})^8$$

$$d) \ \left(\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[6]{64^2} + 4 \cdot \sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[6]{16} \right)^{0,5}$$

2. Przedstaw liczbę w postaci potęgi o podstawie 3.

$$a) \ 81\sqrt[3]{3}$$

$$b) \ \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[9]{27}$$

$$c) \ 27 \cdot \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{3}}$$

4. Przedstaw liczbę w postaci a^x , gdzie $a \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{W}$.

a) $3^{\frac{7}{4}} \cdot 9^{-\frac{3}{8}}$

c) $32^{\frac{7}{5}} \cdot \sqrt[3]{2^4}$

e) $\sqrt[4]{27^3} \cdot (\sqrt[3]{9})^{-2}$

b) $25^{\frac{3}{4}} : 125^{-\frac{5}{2}}$

d) $\sqrt[5]{64} : 0,5^{\frac{3}{5}}$

f) $0,04^{-\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[4]{5^3}$

5. Punkty: A , B i C należą do wykresu funkcji f . Oblicz: a , b i c .

a) $f(x) = 2^x$, $A(-2, a)$, $B(b, \frac{1}{8})$, $C(c, \sqrt[3]{4})$

b) $f(x) = (\frac{3}{4})^x$, $A(\frac{1}{2}, a)$, $B(b, \frac{4}{3})$, $C(c, 1)$

8. Oblicz.

a) $\log_2 16$

c) $\log_2 \frac{1}{8}$

e) $\log_{0,5} 32$

g) $\log_{\sqrt{2}} 16$

b) $\log_{16} 2$

d) $\log_{\frac{1}{16}} 2$

f) $\log_8 \sqrt{2}$

h) $\log_{32} 2\sqrt{2}$

9. Oblicz.

a) $\log_{0,4} \frac{5}{3} + \log_{0,4} 3 - \log_{0,4} 2$

c) $3 \log 2 - \log 0,2 + \log 25$

b) $\log_9 15 - \log_9 \frac{20}{3} + 2 \log_9 6$

d) $\log_{\sqrt{2}} 6 + 2 \log_{\sqrt{2}} 2 - \log_{\sqrt{2}} 3$